ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1996

Option scientifique

Mathématiques II

Vendredi 10 mai 1996 de 8h à 12h

Les calculatrices, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximal 21cm x 15cm sont autorisées.

Le problème a pour but l'étude d'un jeu, dont la description et l'analyse font l'objet de la partie II. Dans la partie I sont établis quelques résultats préliminaires utilisés ensuite.

PARTIE I

On considère dans cette partie une suite (p_n) de nombres réels positifs telle que la série Σp_n converge. On définit pour $0 \leq t \leq 1$ la fonction génératrice F de cette suite (p_n) par:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j.$$

1°) Etude de la fonction F sur [0, 1].

a) Montrer que la série définissant F(t) est convergente pour $0 \leq t \leq 1$.

b) Montrer que F est une fonction croissante sur [0, 1].

En déduire que F admet une limite à droite en tout point de [0, 1[, et une limite à gauche en tout point de]0, 1] (on précisera le théorème utilisé).

c) Soit t_0 un nombre réel appartenant à [0, 1[.

- Etablir pour nombre réel t tel que $t_0 < t \leq 1$ et tout nombre entier naturel n:

$$0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^{n} p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

- En déduire pour tout nombre entier naturel n:

$$0 \leq \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

- En déduire enfin la continuité à droite de F en t_0.

d) Soit t_0 un nombre réel appartenant à]0, 1].

En admettant que l'on établit de façon analogue la continuité à gauche de F en t_0, en conclure que F est continue sur [0, 1].

2°) Etude locale de la fonction F en 0.

a) Pour tout nombre entier naturel n, établir que, pour tout nombre réel t de [0, 1]:

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

b) On considère la fonction ε_n définie sur]0, 1] par l'égalité suivante:

$$F(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_n t^n + t^n \varepsilon_n(t).$$

Déduire de l'inégalité précédente que ε_n est de limite nulle en 0.

Ainsi, F admet un développement limité à l'ordre n en 0, qui permet d'obtenir p_0, ... , p_n.

3°) Etude locale de la fonction F en 1.

a) Etablir pour tout nombre réel t de [0, 1[:

$$\frac{F(t)-F(1)}{t-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \cdots + t^{j-1}).$$

En déduire que la fonction $t \to [F(t)-F(1)]/(t-1)$ est croissante sur [0, 1[.

b) On suppose dans cette question la série $\Sigma j p_j$ convergente.

Montrer que la fonction $t \to [F(t)-F(1)]/(t-1)$ est alors majorée sur [0, 1[, puis en déduire que la fonction F est dérivable en 1, et que:

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j p_j.$$

c) On suppose dans cette question la fonction F dérivable en 1.

Montrer pour tout nombre réel t de [0, 1[et tout nombre entier naturel $n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j (1 + t + \cdots + t^{j-1}) \leq \frac{F(t)-F(1)}{t-1}.$$

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n \leq F'(1)$, puis établir que la série $\Sigma j p_j$ est convergente et comparer sa somme à F'(1).

d) Déduire de ces résultats que F est dérivable en 1 si et seulement si la série $\Sigma j p_j$ est convergente, et que sa somme est alors égale à F'(1).

e) *Application:* pour tout entier naturel n, on suppose que p_n est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenne la valeur n.

A quelle condition nécessaire et suffisante sur la fonction F la variable aléatoire X admet-elle une espérance mathématique? Comparer alors celle-ci à F'(1).

4°) Produit de deux fonctions génératrices.

Soient deux suites (p_n), (q_n) de nombres réels positifs telles que les séries Σp_n, Σq_n convergent. On pose $r_n = p_0 q_n + \ldots + p_i q_{n-i} + \ldots + p_n q_0$ pour tout nombre entier naturel n.

a) Etablir pour tout entier naturel n la majoration suivante:

$$\sum_{j=0}^{n} r_j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j \cdot \sum_{j=0}^{n} q_j.$$

En déduire la convergence de la série Σr_n.

b) On pose alors pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle [0, 1]:

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j \quad , \quad G(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j \quad , \quad H(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j.$$

Prouver que l'on a pour tout nombre réel t de [0, 1] et tout nombre entier naturel n:

$$\sum_{j=0}^{n} r_j t^j \leq \sum_{j=0}^{n} p_j t^j . \sum_{j=0}^{n} q_j t^j \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j .$$

En déduire l'égalité F(t).G(t) = H(t) pour $0 \leq t \leq 1$.

PARTIE II

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à p (où p désigne un nombre réel tel que $0 < p < 1$).
On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital initial de K francs (où K désigne un nombre entier naturel non nul):

- Il lance la pièce:
  - si celle-ci donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient égal à K+1 francs.
  - si celle-ci donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient égal à K-1 francs.

A l'issue de ceci, si son capital est nul, il est déclaré ruiné et le jeu cesse définitivement.

- Sinon, il recommence (muni de son nouveau capital) la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions, et il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne alors par:

- R_K l'événement "le joueur, muni d'un capital initial de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce".
- $p_n(K)$ la probabilité pour que le joueur, muni d'un capital initial de K francs, soit ruiné à l'issue du $n^{ième}$ jet de la pièce. Par convention, on pose $p_o(K) = 0$.
- $t \to F_K(t)$ la fonction génératrice de cette suite $(p_n(K))$, définie donc pour $0 \leq t \leq 1$ par:

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K) t^n$$

On vérifiera que la probabilité $P(R_K)$ de l'événement R_K est égale à la somme de la série $\Sigma p_n(K)$ (qui est donc convergente), et que $P(R_K) = F_K(1)$.

II.1 Etude du cas particulier K = 1.

Dans cette partie, on étudie le jeu en supposant le capital initial du joueur égal à 1 franc.

1°) Etude de la probabilité de ruine du joueur.

a) Calculer $p_1(1)$, $p_2(1)$ et $p_3(1)$.

b) Montrer, pour tout nombre entier $n \geq 2$, que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)^{ième}$ jet de la pièce si et seulement s'il existe un entier j (où $1 \leq j \leq n-1$) tel que:

- à l'issue du premier jet de la pièce, le capital du joueur est égal à 2 francs.
- à l'issue des j jets suivants de la pièce, le capital du joueur revient, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 1 franc.
- à l'issue des n-j jets suivants de la pièce, le capital du joueur arrive, et ceci pour la première fois depuis le début du jeu, à 0 franc et il est donc alors ruiné.

Exprimer en fonction de p et des éléments de la suite $(p_n(1))$ les probabilités des trois événements précédents, puis établir la formule suivante (on rappelle que $p_o(1) = 0$):

$$p \sum_{j=0}^{n} p_j(1)\, p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geq 2. \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

c) En multipliant par t^{n+1} l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 0$, établir à l'aide des résultats de I.4 la relation $pt[F_1(t)]^2 = F_1(t) - (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$.

d) Etudier les variations de la fonction $t \to 1-4p(1-p)t^2$ sur l'intervalle]0, 1[, et montrer que $1-4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2$ pour $0 < t < 1$.
En déduire que, pour $0 < t < 1$, l'équation du second degré $pt\,x^2 - x + (1-p)t = 0$ possède deux racines réelles distinctes x'(t) et x"(t) (on supposera x'(t) < x"(t)).
Pour tout nombre réel t appartenant à]0, 1[, montrer que x"(t) > 1 puis, en remarquant que $F_1(t) \leq 1$, en déduire $F_1(t)$ en fonction de p et t pour $0 < t < 1$.
e) En faisant tendre t vers 1, déterminer alors $F_1(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_1)$ de la ruine du joueur en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2°) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$.
Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_1 et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?

3°) Expression des probabilités $p_n(1)$.
a) Rappeler le développement limité de la fonction $x \to (1+x)^{1/2}$ en 0, puis en déduire le développement limité à l'ordre 2m+1 de la fonction F_1 en 0.
b) Déduire de I.2 que l'on a pour tout nombre entier naturel n $p_{2n}(1) = 0$ et:

$$p_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\, p^n (1-p)^{n+1}.$$

II.2 Etude du cas général.

1°) Etude de la probabilité de ruine du joueur.
a) Le premier jet de la pièce donne Face ou Pile, événements notés ici F_1 ou P_1.
A l'aide du système complet d'événements $\{F_1, P_1\}$, établir la relation suivante pour $n \geq 2$:

$$p_n(1) = p\,p_{n-1}(2).$$

En multipliant par t^n l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 2$, établir la relation $F_1(t) = pt\,F_2(t) + (1-p)t$ pour $0 \leq t \leq 1$, puis en déduire que $F_2(t) = [F_1(t)]^2$
b) On suppose ici $K \geq 2$. En raisonnant de même, établir la formule suivante:

$$P_n(K) = \begin{cases} p \cdot P_{n-1}{}^{(K+1)} + (1-p)\, P_{n-1}{}^{(K-1)} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de p, t, $F_{K+1}(t)$ et $F_{K-1}(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
En étudiant alors la suite $K \to u_K = F_K(t)$, exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K et t.
c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire la probabilité $P(R_K)$ de la ruine du joueur, en distinguant les deux cas $p \leq 1/2$ et $p > 1/2$.

2°) Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq 1/2$.
Pour $p < 1/2$, déterminer à l'aide de la fonction génératrice F_K et des résultats de I.3 l'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du jet de la pièce à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$?

3°) Expression des probabilités $p_n(K)$.
a) A l'aide des résultats obtenus en II.2.1.a), établir que $p_{2n+1}(2) = 0$ puis préciser $p_{2n}(2)$ pour tout nombre entier naturel n.
b) Déterminer $p_{2n}(3)$ et $p_{2n+1}(3)$, puis, plus généralement, $p_{2n}(K)$ et $p_{2n+1}(K)$ pour $K \geq 1$.